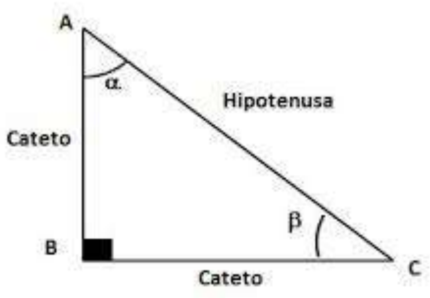
TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego quien hizo la formulación del **Teorema de Pitágoras**:

"En un triángulo rectángulo, la suma de los catetos cuadrados es igual a la hipotenusa cuadrada"

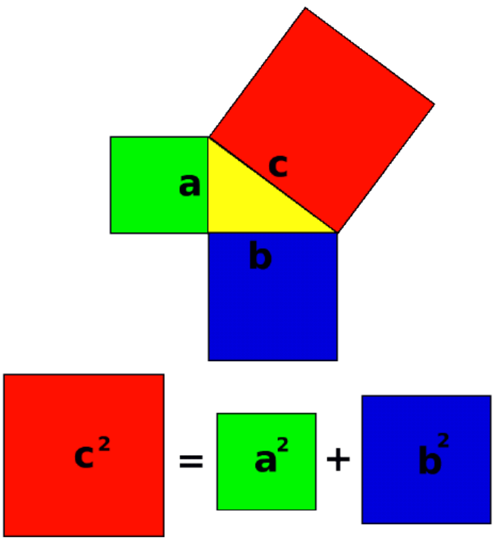
$$H^2 = C^2 + C^2$$

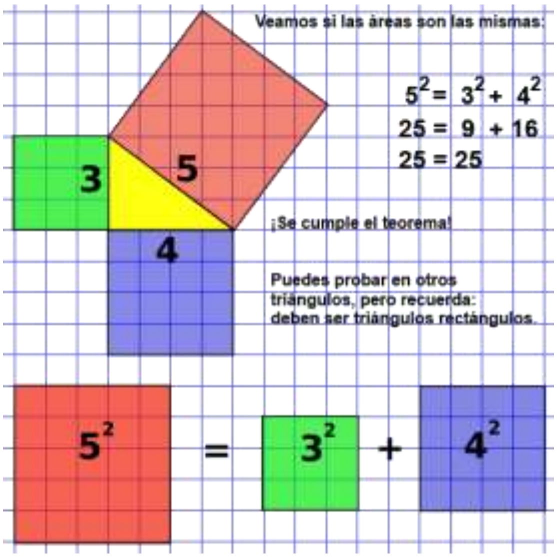


Un triángulo rectángulo es un triángulo con un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos**.

<u>**OBSERVACIÓN:**</u> LOS CATETOS VAN A CAMBIAR EN FUNCIÓN AL ÁNGULO QUE VOY A UTILIZAR.

Geométricamente, el teorema de Pitágoras quiere decir que si dibujamos tres **cuadrados**, de forma que cada uno tenga el lado igual a uno de los tres lados de un triángulo rectángulo, se cumple que el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los otros dos.

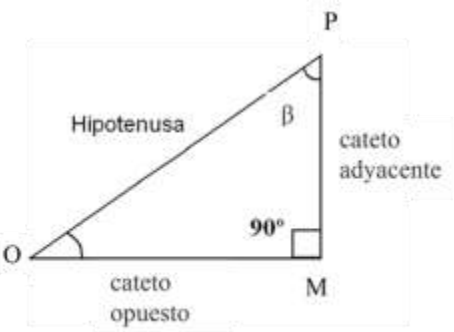




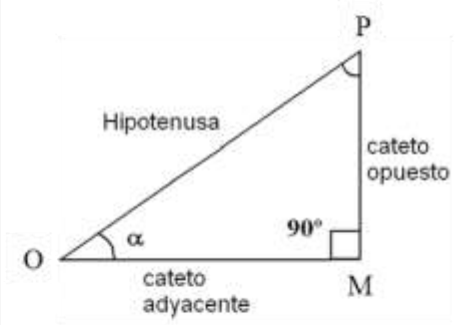
RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las relaciones trigonométricas es la razón entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Son seis y reciben el nombre de: seno, coseno, tangente, cotangente secante y cosecante. Estás, tienen como variable independiente un ángulo. Este ángulo que denotaremos como α, puede estar expresado en grados o en radianes. Para definir relaciones trigonométricas consideremos un sistema de ejes coordenados, el radio vector y el ángulo que forma este con el eje de abscisas (x).

- Si el ángulo es β los catetos serán:



- Si el ángulo a utilizar es α los catetos serán los siguientes



Relaciones trigonométricas principales

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

Relaciones trigonométricas secundarias o co-funciones

$$\cos ec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{sen\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot g\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

Cálculo de lados y ángulos agudos de triángulos rectángulos

Estas razones trigonométricas nos permiten calcular distintos problemas.

1. Calcular las longitudes aproximadas de un triángulo rectángulo si se conocen las medidas de un ángulo agudo y un lado.

   Ejemplo: Sea el triángulo ABC rectángulo en $\hat{A}$

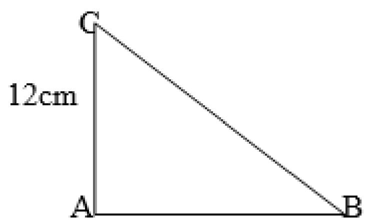
   $\hat{B}$ =31°

   $\overline{AC}$ =12 cm

   $\overline{AB}$ =?

   $\overline{BC}$ =?

   $\hat{C}$ =?



Los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y el ángulo B pueden relacionarse mediante la relación trigonométrica:

$\operatorname{tg} \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ Reemplazando los datos conocidos en esta fórmula tendremos:

$\operatorname{tg} 31° = 0{,}6009 = \dfrac{12\ cm}{\overline{AB}}$

Despejando $\overline{AB}$ de las dos últimas igualdades obtendremos: $\overline{AB} = \dfrac{12\ cm}{0{,}6009} = 19{,}97\ cm$.

Para calcular el lado $\overline{BC}$ se usa la relación trigonométrica:

$\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ Reemplazando los datos conocidos tendremos

$\operatorname{sen} 31° = 0{,}5104 = \dfrac{12\ cm}{\overline{BC}}$

Despejando $\overline{BC}$ de las dos últimas igualdades obtendremos:

$\overline{BC} = \dfrac{12\ cm}{0{,}5104} = 23{,}2992\ cm$

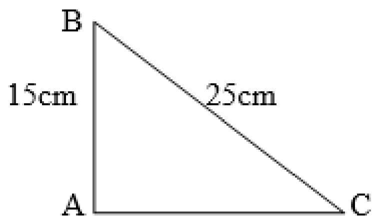
El ángulo $\hat{C}$ se obtiene al aplicar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo que debe ser 180°. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, como conozco $\hat{A} = 90°$ y $\hat{B} = 31°$ se tendrá:

$\hat{C} = 180° - 90° - 31 |= 59°$

Nota: *Siempre que sea posible deberás usar los datos que te dan en el problema y no los datos que fuiste calculando en los diversos pasos del problema, ya que estos últimos generalmente están sujetos a errores.*

2. Calcular los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si se conocen las longitudes de dos lados.

   Ejemplo: Sea el triángulo ABC rectángulo en $\hat{A}$



$\overline{AB}$ =15

$\overline{BC}$ =25

$\overline{CA}$ =?

$\hat{C}$ =?

$\hat{B}$ = ?

En este caso para obtener el lado $\overline{AC}$ podemos usar el Teorema de Pitágoras.

$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, despejando el lado desconocido se obtiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\ cm$$

Para encontrar el ángulo $\hat{C}$ usamos la relación trigonométrica que nos vincula el ángulo buscado con los lados conocidos, esta relación es:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{15\ cm}{25\ cm} = 0{,}6$$

Con la calculadora podemos hallar $\hat{C}$ =37°. (usando shift sen y luego ° ’ ”)

Una vez conocidos dos ángulos el tercero se obtiene igual que en el ejemplo anterior.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

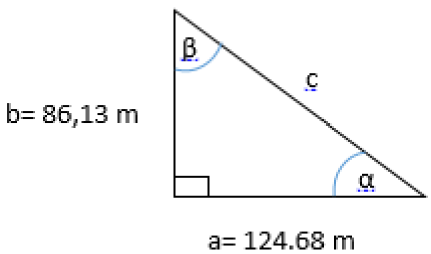
$\hat{B} =$ 180°-90°-37°=53°

ACTIVIDADES

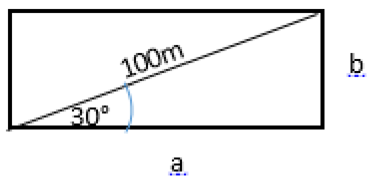
---

1. Ingrese al Blog de Matemática para el ingreso a las carreras de la FAUD: http://www.matematica-ingreso.faud.unsj.edu.ar y trabaje en los ejercicios que se encuentran en la pestaña: Curso de Ingreso→ Taller 3→Ejercitación propuesta para el taller 3→ Teorema de Pitágoras – Relaciones trigonométricas.

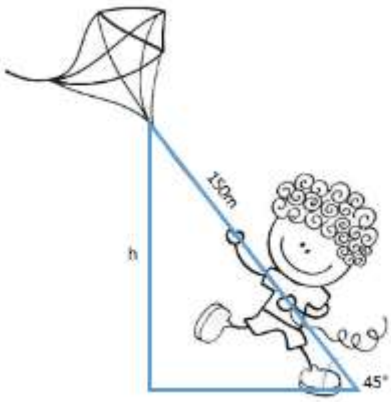
2. Calcule los ángulos interiores, su perímetro y superficie de un triángulo rectángulo que tiene de base
124.68 m y altura 86.13 m.



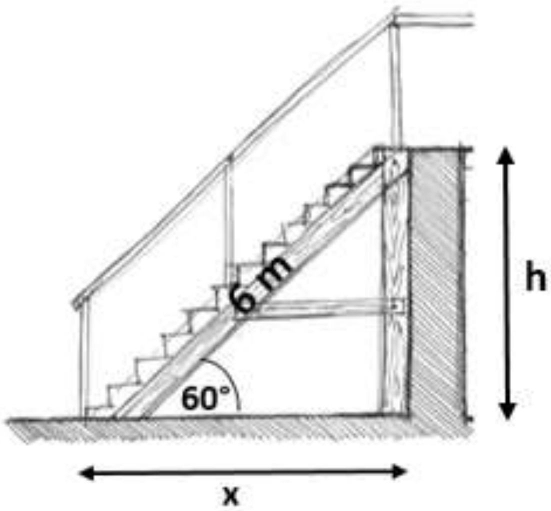
3. Encuentre el perímetro de un campo rectangular que tiene la diagonal de 100 m; y forma con uno de sus lados un ángulo de 30°.



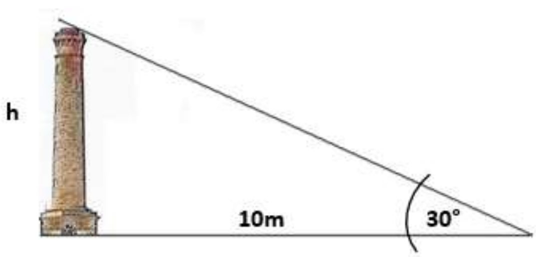
3. En la Avenida de Circunvalación un niño remonta un barrilete empleando un hilo de 150m. Encuentre: ¿a qué altura de la tierra se encuentra el barrilete cuando el hilo esta tenso y forma un ángulo de 45º respecto de la horizontal?



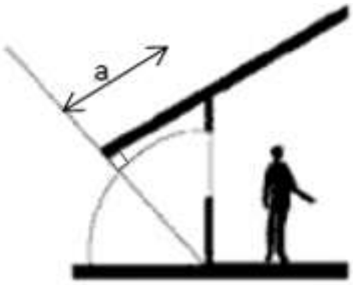
4. Una escalera de 6m de largo no debe inclinarse más de 60º. ¿a cuántos m del muro la debemos poner en su base? y ¿qué altura alcanzará sobre el muro?



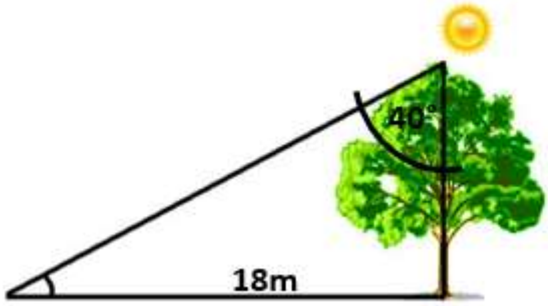
5. Una torre proyecta una sombra de 10metros cuando el sol está a 30° sobre el horizonte. Calcule la altura de la torre.



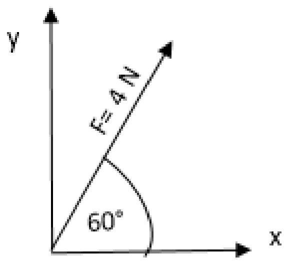
6. Calcular el largo del parasol de distancia "a" de la fachada de una vivienda con orientación oeste, si la altura de la pared es de 2.30m y el ángulo que forma los rayos del sol con el muro es de 65° ¿Cuál es la medida de "a"?



7. ¿Cuándo los rayos del sol forman 40º con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿cuál es su altura?



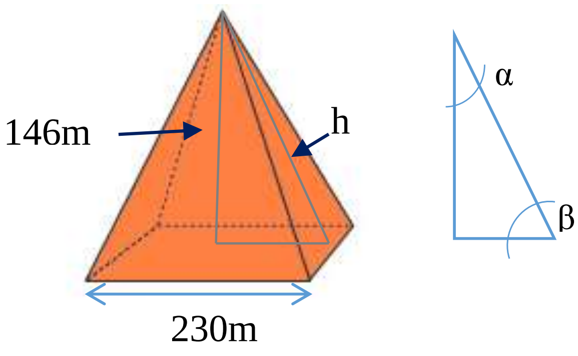
8. Hallar la proyección de la fuerza "F" sobre eje "Y" y el eje "X"



EJERCITACIÓN INTEGRADORA:

EJERCICIO1:

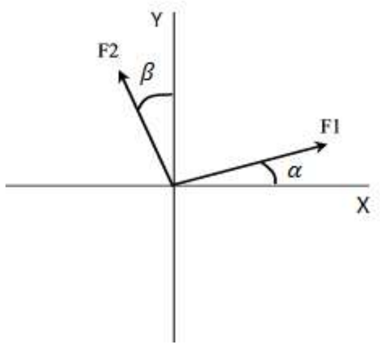
En la pirámide de Giza el área total de la pirámide y el área lateral se encuentran en proporción aúrea, y también lo están el área lateral y el área de la base.



a) Verifique si se cumple esta proporción con los datos dados.
b) Calcule el área lateral y el volumen de la pirámide.
c) Grafique en escala 1:2000 el cuadrado de la base de la pirámide.
d) Encuentre el ángulo (β) formado por la base y h y el ángulo (α) formado por la altura y h.

EJERCICIO 2:

a) Calcular las dos componentes rectangulares de las fuerzas F1 y F2. (Para resolverlo podes consultar el apunte "Descomposición de fuerzas



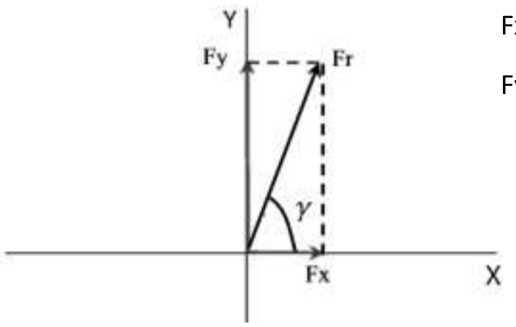
$F_1 = 100\ newton$

$F_2 = 80\ newton$

$\alpha = 20°\ del\ eje\ X$

$\beta = 20°\ del\ eje\ Y$

b) Calcular "Fr" y el ángulo "γ" sabiendo que:

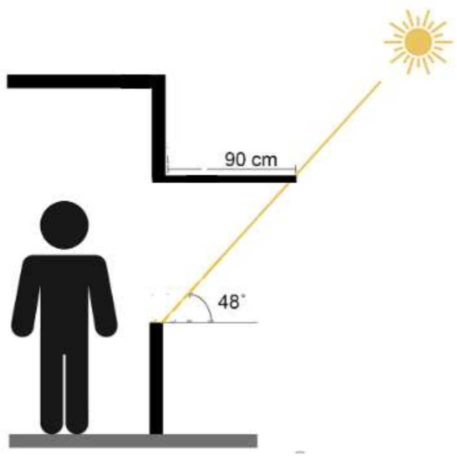


Fx= 60 N

Fy= 80 N

EJERCICIO 3:

Calcular la altura de la ventana teniendo en cuenta los siguientes datos:



EJERCICIO 4:

Calcular el ángulo de inclinación de la siguiente rampa.